Επαναληπτικό διαγώνισμα
Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής
Γ λυκείου ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_o \in A$;

4 μονάδες

A_2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων όταν ο ν είναι περιττός.

3 μονάδες

A_3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = 2x$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

8 μονάδες

A_4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

I. Το εύρος R είναι μέτρο θέσης.
II. Η διασπορά εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
III. Ισχύει ότι: $\left(\dfrac{x^2+2x}{\eta\mu x}\right)' = \dfrac{2x+2}{\sigma\upsilon\nu x}$.
IV. Ένα τοπικό ελάχιστο είναι πάντα μικρότερο από ένα τοπικό μέγιστο..
V. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ,τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha \cdot x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3. Δίνεται επίσης ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 9x$.

B_1. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

6 μονάδες

B_2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση fως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

6 μονάδες

Β3. Να βρείτε το σημείο της C_f στο ο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

6 μονάδες

Β4. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)+3}-2}{x^2-1}$ ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h+1)^3-3(h+1)+2}{h}$

7 μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Ο χρόνος που χρειάστηκαν να εξυπηρετηθούν 25 πελάτες της εταιρείας ''ΧΑΛΚΙΑΔΑΚΗΣ'' ΟΕ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Χρόνος σε λεπτά	**Κέντρα κλάσεων** x_i	**Αριθμός πελατών** ν_i	**Σχετική συχνότητα** $f_i\%$
[…,..)		11	
[..,..)	3	7	
[..,..)			
[6,..)		2	
[..,..)			4%
Σύνολο			

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων είναι c=2.

5 μονάδες

Γ2. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιο σας συμπληρωμένο και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

7 μονάδες

Γ3. Ποιο είναιτο ποσοστό των πελατών που χρειάστηκε τουλάχιστον 3 λεπτά για να

εξυπηρετηθεί;

6 μονάδες

Γ4. Να εξετάσετε αν το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.(Δίνεται ότι $\sqrt{5,12}\simeq 2,26$)

7 μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Η βαθμολογία των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή. Αν γνωρίζετε ότι 47,5% των μαθητών έχει γράψει βαθμό μεταξύ 13 και 17 και ότι ως άριστα θεωρείται το 20 τότε:

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των βαθμών είναι $s = 2$ (μονάδες 3) και η μέση τιμή τους $\overline{x} = 13$ (μονάδες 4).

7 μονάδες

$Δ_2$. Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος, το εύρος καθώς και το ποσοστό των μαθητών που έχουν γράψει κάτω από 13.

6 μονάδες

Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι το πλήθος των μαθητών που έχουν γράψει βαθμό μεταξύ 9 και 11, είναι 27, τότε:

$Δ_3$. Να βρείτε το σύνολο των μαθητών του σχολείου (μονάδες 3) καθώς και το πλήθος αυτών που έχουν γράψει βαθμό μεγαλύτερο του 17(μονάδες 3).

6 μονάδες

$Δ_4$. Μετά από λάθος στη μοριοδότηση των θεμάτων από τον καθηγητή, οι μαθητές βαθμολογήθηκαν περισσότερο απ' ότι άξιζαν. Για να διορθώσει το λάθος του ο καθηγητής, θα μειώσει 5% τη βαθμολογία κάθε μαθητή . Να συγκρίνετε ως προς την ομοιογένεια το δείγμα των βαθμών πριν και μετά τη διόρθωση του λάθους.

6 μονάδες

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A_1. Σελίδα 14 σχολικό
A_2. Σελίδα 87 σχολικό
A_3. Σελίδα 28,29 σχολικό
A_4. Ι.Λ ΙΙ.Λ ΙΙΙ.Λ IV.Λ V.Σ

ΘΕΜΑ Β

B_1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+\alpha$.

Αφού η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 , θα ισχύει $f(0)=3 \Leftrightarrow \beta=3$.

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(2)$ και αφού είναι παράλληλη στην (ε) θα ισχύει $f'(2)=\lambda_\varepsilon=9 \Leftrightarrow 3\cdot 2^2+\alpha=9 \Leftrightarrow \alpha=-3$

B_2. Είναι $f(x)=x^3-3x+3$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=3x^2-3$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$
$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-3>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>1$
$f'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$

Οπότε έχουμε

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Επίσης παρουσιάζει

● στο $x_1=-1$ τοπικό μέγιστο το $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+3=-1+3+3=5$

● στο $x_2=1$ τοπικό ελάχιστο το $f(1)=1^3-3\cdot 1+3=1-3+3=1$

B_3. Αρκεί να βρούμε το σημείο της C_f στο οποίο η f' γίνεται ελάχιστη.

Είναι $f''(x)=6x$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)>0 \Rightarrow 6x>0 \Leftrightarrow x>0$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

Άρα έχουμε

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f' γίνεται ελάχιστη για $x=0$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(0, f(0)\right)$, δηλαδή το $(0,3)$

B_4. i) Έχουμε :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)+3}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-3x+6}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^3-3x+6}-2\right)\left(\sqrt{x^3-3x+6}+2\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^3-3x+6}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+6-4}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^3-3x+6}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^3-3x+6}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x^3-3x+6}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x-2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^3-3x+6}+2\right)}=\frac{0}{2\cdot 4}=0$$

ii)Έχουμε :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^3-3(h+1)+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^3-3(h+1)+3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+1)-f(1)}{h}=f'(1)=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ_1. Έστω c το πλάτος της κάθε κλάσης και α το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης. Τότε οι κλάσεις θα είναι :

$[\alpha,\alpha+c),\ \ [\alpha+c,\alpha+2c),\ \ [\alpha+2c,\alpha+3c),\ \ [\alpha+3c,\alpha+4c)\ \ [\alpha+4c,\alpha+5c)$

Επομένως έχω

α+3c=6 (1)

Αφού $x_2=3 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha+c+\alpha+2c}{2}=3 \Leftrightarrow 2\alpha+3c=6$ (2)

Από την (1) έχω : α=6-3c

Άρα η (2) γίνεται:

$$2\left(6-3c\right)+3c=6 \Rightarrow 12-6c+3c=6 \Rightarrow 3c=6 \Rightarrow c=2$$

Γ$_2$. Για c=2 η (1) γίνεται α=0

[0,2)	1	11	44%
[2,4)	3	7	28%
[4,6)	5	4	16%
[6,8)	7	2	8%
[8,10)	9	1	4%
Σύνολο		25	100%

Ξέρουμε ότι $f_5\% = 4 \Leftrightarrow \dfrac{v_5}{25}100 = 4 \Leftrightarrow v_5 = 1$

$$v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=v \Rightarrow$$
$$11+7+v_3+2+1=25$$
$$v_3=4$$

$$f_1\% = \frac{v_1}{v}100 = \frac{11}{25}100 \Leftrightarrow f_5\% = 44\%$$

$$f_2\% = \frac{v_2}{v}100 = \frac{7}{25}100 \Leftrightarrow f_2\% = 28\%$$

$$f_3\% = \frac{v_3}{v}100 = \frac{4}{25}100 \Leftrightarrow f_3\% = 16\%$$

$$f_4\% = \frac{v_4}{v}100 = \frac{2}{25}100 \Leftrightarrow f_4\% = 8\%$$

Γ$_3$. Επειδή οι κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες,

το ποσοστό των μαθητών που χρειάζεται τουλάχιστον 3 λεπτά είναι:

$$\frac{f_2\%}{2} + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 14+16+8+4 = 42\%$$

Γ_4.

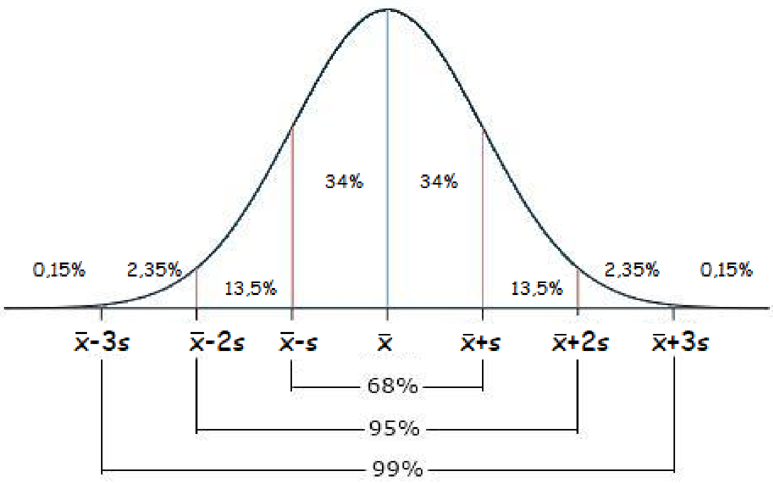
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 =$$
$$= 1 \cdot 0,44 + 3 \cdot 0,28 + 5 \cdot 0,16 + 7 \cdot 0,08 + 9 \cdot 0.04$$
$$= 0,44 + 0.84 + 0,8 + 0,56 + 0,36$$
$$= 3$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 f_i =$$
$$= (3-1)^2 \cdot 0,44 + (3-3)^2 \cdot 0,28 + (3-5)^2 \cdot 0,16 + (3-7)^2 \cdot 0,08 + (3-9)^2 \cdot 0,04 =$$
$$= 1,76 + 0,64 + 1,28 + 1,44 = 5,12$$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5,12} \approx 2,26$,οπότε $CV\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{2.26}{3} \cdot 100 \approx 75,33\% > 10\%$,άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ_1. Αφού το δείγμα ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή η καμπύλη συχνοτήτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



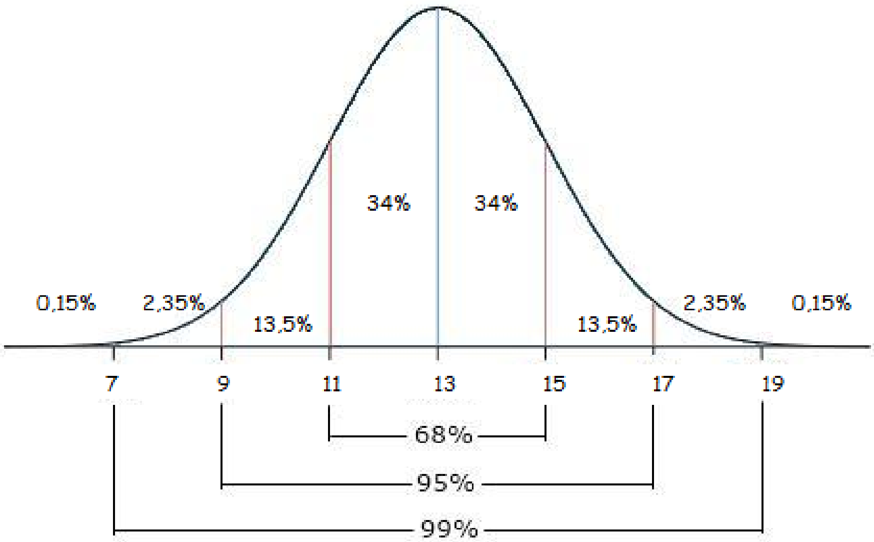
Παρατηρούμε λοιπόν ότι η σχετική συχνότητα που είναι 47,5% αντιστοιχεί στα διαστήματα:

$(\bar{x} - 2s, \bar{x})\ \kappa\alpha\iota\ (\bar{x}, \bar{x} + 2s)$. Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\begin{cases} (\bar{x} - 2s, \bar{x}) = (13,17) \\ \acute{\eta} \\ (\bar{x}, \bar{x} + 2s) = (13,17) \end{cases} \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \begin{cases} \bar{x} - (\bar{x} - 2s) = 17 - 13 \\ \acute{\eta} \\ \bar{x} + 2s - \bar{x} = 17 - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s = 4 \\ \acute{\eta} \\ 2s = 4 \end{cases} \Rightarrow s = 2$$

Η περίπτωση όμως $(\bar{x}-2s,\bar{x})=(13,17)$ δεν είναι δεκτή καθώς μας δίνει $\bar{x}=17$ δηλαδή θα ισχύει $\bar{x}+3s=17+6=23$ το οποίο απορρίπτεται καθώς δεν μπορεί ο βαθμός ενός μαθητή να είναι πάνω από 20.

Άρα ισχύει $(\bar{x},\bar{x}+2s)=(13,17)$ δηλαδή $\bar{x}=13$ και η παραπάνω καμπύλη γίνεται:



Δ2. $\delta=\bar{x}=13$

$R\simeq 6s=12$

Το ποσοστό των μαθητών που έχει γράψει κάτω από 13 είναι 50%, αφού $\bar{x}=13$

Δ3. Το ποσοστό των μαθητών που έχει γράψει μεταξύ του 9 και του 11 είναι 13,5% το οποίο αντιστοιχεί σε 27 άτομα. Ισχύει λοιπόν ότι:

$13,5\%\cdot\nu=27\Leftrightarrow\frac{13,5}{100}\cdot\nu=27\Leftrightarrow\nu=\frac{27\cdot100}{13,5}=200$, δηλαδή το σύνολο των μαθητών είναι 200.

Ενώ το ποσοστό αυτών που έχουν γράψει πάνω από 17 είναι 2,5%, άρα το πλήθος τους θα είναι:

$2,5\%\cdot200=\frac{2,5}{100}\cdot200=5$ άτομα

Δ4. Αν υποθέσουμε ότι οι βαθμοί αρχικά ήταν x_i ενώ μετά τη διόρθωση είναι y_i ,τότε ισχύει:

$y_i=x_i-5\%x_i=x_i-0,05x_i=0,95x_i$.Επομένως αν CV' ο νέος συντελεστής μεταβολής έχουμε:

$CV'=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{0,95\cdot s_x}{0,95\cdot|\bar{x}|}=\frac{s_x}{|\bar{x}|}=CV$ όπου CV ο αρχικός συντελεστής μεταβολής, δηλαδή η ομοιογένεια του δείγματος δεν επηρεάστηκε μετά τη διόρθωση.