

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 5

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

Μονάδες 3

A3. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ

i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

ii) Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

iii) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

iv) Κάθε συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, διατηρεί πρόσημο στο $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

v) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και $1-1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 2\kappa}{x - \kappa^2}$. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

B1. Να δείξετε ότι $\kappa = 1$.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμψής.

Μονάδες 8

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=2, x=3$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x, x > 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και να βρείτε τα ακρότατα της.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$, τέτοιο ώστε το $M(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(x_0)}{x-2} + \frac{x-\eta\mu x}{x-1} = 0$, όπου x_0 το σημείο του Γ2, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

Δ1. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για τις διάφορες τιμές του λ .

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο καθώς και το είδος του ακροτάτου.

Μονάδες 4

Δ2. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

Μονάδες 6

Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lambda = e$

Μονάδες 5

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $2e^x - 2(ex - x + 1) - \ln x^2 = 0$, $x > 0$

Μονάδες 5