

Επαναληπτικό διαγώνισμα  
Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής  
Γ λυκείου ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

- A<sub>1</sub>. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο  $x_1 \in A$  και πότε τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο  $x_2 \in A$ .  
(Μονάδες 4)
- A<sub>2</sub>. Ας υποθέσουμε ότι  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$ ,  $k \leq n$ . Τι ονομάζεται συχνότητα  $n_i$  της τιμής  $x_i$ ;  
(Μονάδες 4)
- A<sub>3</sub>. Να αποδείξετε ότι για τη σχετική συχνότητα  $f_i$  ισχύουν οι ιδιότητες:  
i)  $0 \leq f_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ii)  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$ ,  $1, 2, \dots, k$   
(Μονάδες 7)
- A<sub>4</sub>. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.  
I. Το ύψος των μαθητών ενός σχολείου είναι ποιοτική μεταβλητή.  
II. Οι αθροιστικές συχνότητες  $N_i$  εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής  $x_i$ .  
III. Ισχύει ότι:  $(x^2 \cdot \sqrt{x})' = \frac{x}{\sqrt{x}}$ .  
IV. Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.  
V. Ισχύει ότι  $(\sqrt{2})' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$   
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + \kappa$ . Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$ , τότε

- B<sub>1</sub>. Να δείξετε ότι  $\kappa=1$

(Μονάδες 3)

- B<sub>2</sub>. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

(Μονάδες 7)

B<sub>3</sub>. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

(Μονάδες 8)

B<sub>4</sub>. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $B(2, f(2))$

(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας που αναφέρεται σε  $n$  παρατηρήσεις που έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους .

Κλάσεις	Κεντρική Τιμή	$v_i$	$f_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i$	$F_i\%$
$[\alpha, \dots)$			$\frac{k}{5}$				
$[\dots, \dots)$		12	$k - \frac{1}{5}$				
$[\dots, \dots)$	5		$k^2 + \frac{3}{20}$				
$[\dots, \dots)$			$\frac{2k}{5}$				
Σύνολο							

Δίνεται επίσης ότι  $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x+3} - 2}$

Γ<sub>1</sub>. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

Αν  $\alpha = 0$  ,

(Μονάδες 6)

Γ<sub>2</sub>. Να αποδείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι 2.

(Μονάδες 5)

Γ<sub>3</sub>. Να δείξετε ότι  $k = \frac{1}{2}$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

(Μονάδες 9)

Γ<sub>4</sub>. Να κάνετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των συχνοτήτων .

(Μονάδες 5)

#### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}$ , η οποία παρουσιάζει στη θέση  $x = -2$  ακρότατο το -6.

Δ<sub>1</sub>. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 10$  και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της  $f$ .

(Μονάδες 7)

Δ<sub>2</sub>. Να υπολογίσετε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(4+h)}{h}$ .

(Μονάδες 6)

Δ<sub>3</sub>. Να συγκρίνετε τις τιμές  $f(\pi)$  και  $f(\pi - 1)$ . ( $\pi \approx 3,14$ )

(Μονάδες 5)

Δ<sub>4</sub>. Αν  $K$  είναι σημείο της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $A(2, f(2))$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του  $K$  από την αρχή των αξόνων για  $x = 0$ .

(Μονάδες 7)

#### Απαντήσεις

#### ΘΕΜΑ Α

A<sub>1</sub>. Σελ. 14 σχολικό

A<sub>2</sub>. Σελ. 65 σχολικό

A<sub>3</sub>. Σελ. 65 σχολικό

A<sub>4</sub>. Ι.Λ Π.Σ ΙΙΙ.Λ ΙV.Λ V.Λ

#### ΘΕΜΑ Β

B<sub>1</sub>.  $A_f = \mathbb{R}$ . Αφού η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$ , τότε  $f(0) = 1$ . Επομένως έχω  $f(0) = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$




B<sub>2</sub>. Για  $\kappa=1$  έχω  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2(\sqrt{x^2+3}+2)}{x+1} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24 \end{aligned}$$

B<sub>3</sub>. Για  $x \in \mathbb{R}$  έχω  $f'(x) = 12x^2(x-1)$ .

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \text{ ή } x-1 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

x	$-\infty$ 0	1 $+\infty$	
$12x^2$	+	+	+
$x-1$	-	-	+
$f'$	-	-	+
f			

Επομένως η  $f$  είναι :

- γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$ , αφού η  $f$  συνεχής στο 0
- γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$

Επίσης η  $f$  παρουσιάζει :

- στο  $x_0 = 1$  ελάχιστο το  $f(1) = 0$

B<sub>4</sub>.  $f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 1 = 17$ , άρα  $B(2, 17)$ .

Έστω  $(\varepsilon)$ :  $y = \lambda x + \beta$  η εξίσωση της εφαπτομένης. Τότε  $\lambda = f'(2) = 12 \cdot 2^2(2-1) = 48$ .

Οπότε προκύπτει  $(\varepsilon)$ :  $y = 48x + \beta$

$B \in (\varepsilon) \text{άρα} : 17 = 48 \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = -79$ . Επομένως τελικά έχουμε  $(\varepsilon) : y = 48x - 79$

### ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma_1. \quad \alpha = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 (\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 (\sqrt{x+3} + 2)}{\sqrt{x+3}^2 - 2^2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 (\sqrt{x+3} + 2)}{x+3-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 (\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)] = 0 \cdot 4 = 0$$

$\Gamma_2.$  Αν σείναι το πλάτος των κλάσεων τότε έχουμε :

$$1^{\text{η}} \text{ κλάση} : [0, c)$$

$$2^{\text{η}} \text{ κλάση} : [c, 2c)$$

$$3^{\text{η}} \text{ κλάση} : [2c, 3c)$$

$$4^{\text{η}} \text{ κλάση} : [3c, 4c)$$

$$\text{Είναι } x_3 = 5 \Leftrightarrow \frac{2c+3c}{2} = 5 \Leftrightarrow 5c = 10 \Leftrightarrow c = 2$$

$\Gamma_3.$  Οι κλάσεις είναι :  $[0, 2), [2, 4), [4, 6), [6, 8)$  .

Επίσης έχουμε

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{5} + k - \frac{1}{5} + k^2 + \frac{3}{20} + \frac{2k}{5} = 1 \Leftrightarrow 4k + 20k - 4 + 20k^2 + 3 + 8k = 20$$

$$20k^2 + 32k - 21 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad k = -\frac{21}{10} .$$

Η τιμή  $k = -\frac{21}{10}$  απορρίπτεται γιατί τότε θα ήταν  $f_1 = \frac{-21}{5} = -\frac{21}{50}$ , άτοπο. Άρα  $k = \frac{1}{2}$  .

Για  $k = \frac{1}{2}$ , παίρνουμε :

$$f_1 = \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = 0,1, \quad f_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} = 0,3, \quad f_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4 \quad \text{και}$$

$$f_4 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 .$$

Είναι ακόμη ,  $f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{12}{v} \Leftrightarrow 0,3 \cdot v = 12 \Leftrightarrow v = \frac{12}{0,3} = \frac{120}{3} = 40$

$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{v_1}{40} \Leftrightarrow v_1 = 40 \cdot 0,1 \Leftrightarrow v_1 = 4$

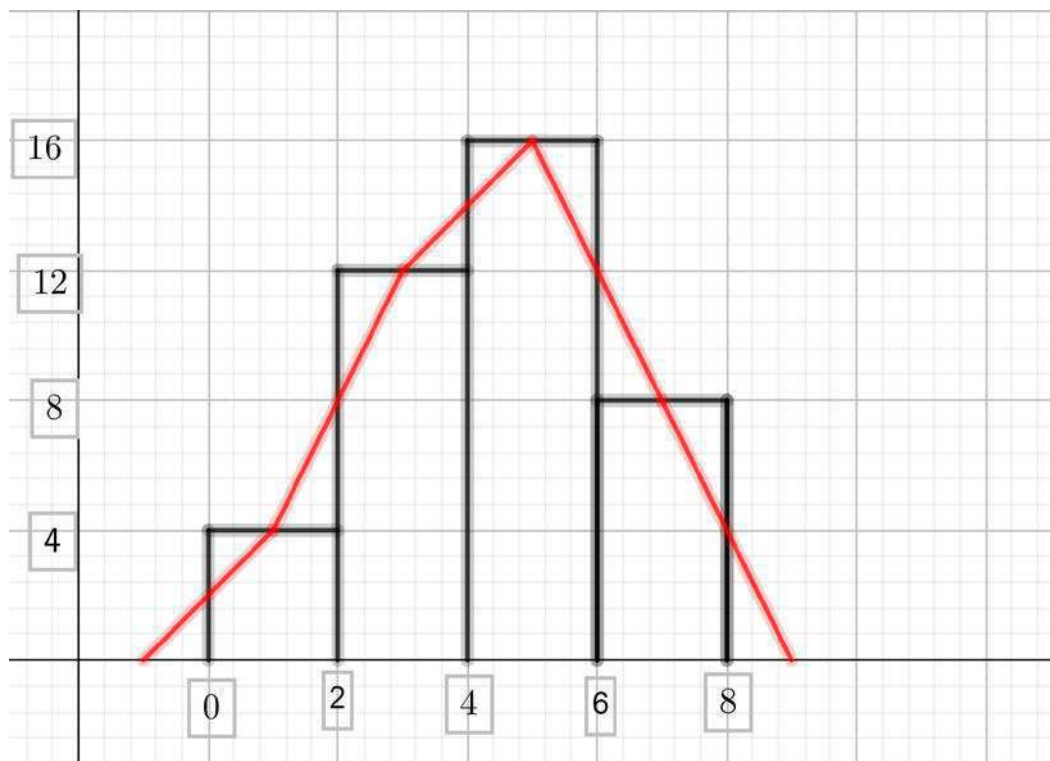
$f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{v_3}{40} \Leftrightarrow v_3 = 40 \cdot 0,4 \Leftrightarrow v_3 = 16$

$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{v_4}{40} \Leftrightarrow v_4 = 40 \cdot 0,2 \Leftrightarrow v_4 = 8$

Οπότε ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

Κλάσεις	Κεντρική Τιμή	$v_i$	$f_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i$	$F_i\%$
[0,2)	1	4	0,1	10	4	0,1	10
[2,4)	3	12	0,3	30	16	0,4	40
[4,6)	5	16	0,4	40	32	0,8	80
[6,8)	7	8	0,2	20	40	1	100
Σύνολο		40	1	100			

Γ<sub>4</sub>



ΘΕΜΑ Δ

Δ<sub>1</sub>. Η f ορίζεται αν και μόνο αν  $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ , άρα  $A = \mathbb{R} - \{1\}$ .

$$\text{Για } x \neq 1: f'(x) = \frac{(x^2 + \alpha x + \beta)'(x-1) - (x^2 + \alpha x + \beta)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(2x + \alpha)(x-1) - (x^2 + \alpha x + \beta)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{2x^2 - 2x + \alpha x - \alpha - x^2 - \alpha x - \beta}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - \alpha - \beta}{(x-1)^2}$$

Έχουμε:

- $f'(-2) = 0 \Rightarrow \frac{4 + 4 - \alpha - \beta}{9} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 8$
- $f(-2) = -6 \Rightarrow \frac{4 - 2\alpha + \beta}{-3} = -6 \Rightarrow -2\alpha + \beta = 14$

Λύνουμε το σύστημα  $\begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ -2\alpha + \beta = 14 \end{cases}$  και έχουμε  $\alpha = -2$  και  $\beta = 10$

Άρα  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 10}{x - 1}, f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$  ή  $x = 4$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1) \cup (1, 4)$

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
f'(x)	+		-		+
f(x)					

Επομένως η f είναι :

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα  $[-2, 1)$  και  $(1, 4]$  και
- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -2]$  και  $[4, +\infty)$

Επίσης η f παρουσιάζει :

- στο  $x_1 = -2$  τοπικό μέγιστο το  $f(-2) = -6$  και
- στο  $x_2 = 4$  τοπικό ελάχιστο το  $f(4) = 6$

Δ<sub>2</sub>.

$$\begin{aligned} \text{Για } x \neq 1: f''(x) &= \frac{(x^2 - 2x - 8)'(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 8)[(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 8)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 8)]}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x + 16}{(x-1)^3} = \frac{18}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε από Δ1 ότι  $f'(4) = 0$ , άρα το όριο γίνεται:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(4+h) - f'(4)}{h} = f''(4) = \frac{18}{(4-1)^3} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

Δ<sub>3</sub>. Οι αριθμοί  $\pi$ ,  $\pi-1$  ανήκουν στο διάστημα  $(1,4)$  όπου  $f$  γνησίως φθίνουσα. Έχουμε λοιπόν:

$$\pi - 1 < \pi \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(\pi - 1) > f(\pi)$$

Δ<sub>4</sub>. Έχουμε:  $f(2) = 10$ ,  $f'(2) = -8$ . Το σημείο  $A(2,10)$  επαληθεύει την εξίσωση της εφαπτομένης  $y = \lambda x + \beta$  με  $\lambda = -8$ . Άρα

$$10 = -8 \cdot 2 + \beta \Rightarrow \beta = 26$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A$  είναι  $(\varepsilon)$ :  $y = -8x + 26$ .

Γνωρίζουμε ότι το σημείο  $K$  είναι σημείο της  $(\varepsilon)$ , άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή είναι της μορφής:

$$K(x, y) \text{ ή } K(x, -8x + 26)$$

Επομένως για την απόσταση  $OK$  εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο  $OK\Lambda$ , ισχύει:

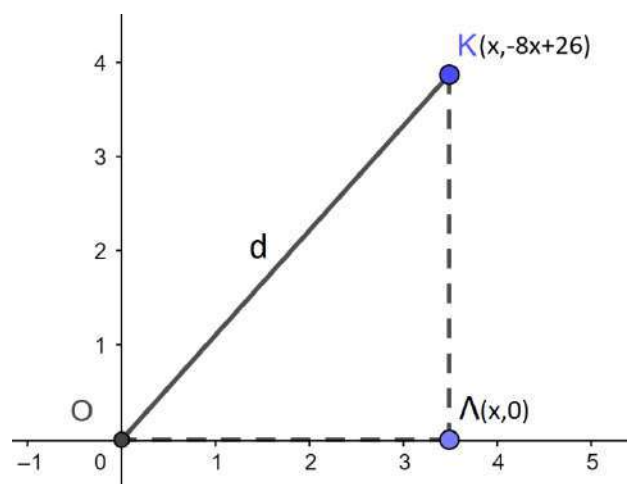
$$OK^2 = O\Lambda^2 + K\Lambda^2 \Rightarrow$$

$$d^2 = x^2 + (-8x + 26)^2 \Rightarrow$$

$$d^2 = x^2 + 64x^2 - 416x + 676 \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{65x^2 - 416x + 676}, x \in \mathbb{R}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης είναι:



$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{65x^2 - 416x + 676}} \cdot (65x^2 - 416x + 676)' = \frac{130x - 416}{2\sqrt{65x^2 - 416x + 676}} =$$

$$\frac{65x - 208}{\sqrt{65x^2 - 416x + 676}}$$

$$\text{Για } x = 0 : d'(0) = \frac{-208}{\sqrt{676}} - \frac{208}{26} = -8 \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$